單元 2： 二階微分方程及其應用

特定目標：

1. 學習解某些特定二階微分方程技巧。
2. 在實際的情況下應用有關建立及解二階微分方程的技巧。
3. 能夠理解二階微分方程的解。

內容	時間分配	教學建議
2.1 分類	2	此部分是一階微分方程的延續，主要著重研究下列的方程： $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+q(x)y=f(x)$$ 教師應詳加陳述這類方程的特點 (如 y 及其導數爲綫性，而 p、q 及 f 則爲 x 的函數)，並應提供足夠例子予學生，幫助他們分辨不同類別的微分方程如齊次綫性方程 ($f(x)=0$)，非齊吹綫性方程 ($f(x)\neq 0$) 及非綫性方程 (不能寫成上述形式的方程)。 在此階段，教師可介紹一些二階微分方程的現實生活例子，如繫於彈簧的物體的振動，在引力及與速度成正比的阻力作用下的自由下墜運動，及最佳存貨水平之定價方針等問題。
2.2 疊合原理	2	此原理可用一具體例子說明。例如，讓學生證明 $y=x$ 及 $y=x^2$ 是 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$ 的解，然後繼續證明 $y=3x+4x^2$ 亦爲方程的解。嘗試幾個例子後，教師可引導學生證明疊合原理；但對能力稍遜的學生，則可刪去證明部分。教師可省略綫性齊次方程的解是綫性獨立之原理。教師可以用例子引出疊合原理並不適用於非齊次綫性方程及非綫性的方程，例如在 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=1$ 的方程中，$y=1+\sin x$ 及 $y=1+\cos x$ 是方程的解，但 $y=3(1+\sin x)$ 及 $y=(1+\sin x)+2(1+\cos x)$ 皆不是方程的解。學生應從此例子清楚知道疊合原理只適用於齊次綫性的微分方程。

內容	時間分配	教學建議
2.3 常係數齊次方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0$ 的解	4	此處只要求學生利用輔助方程 (或特徵方程) 求此類方程的解，其他方法並不需要。 教師可與學生討論所產生的三種不同結果，即輔助方程有兩相異實根，兩相同實根，及兩複共軛根。對於後者，若根是 $u\pm vi$ ，則設 $y = ze^{ux}$，代入，方程可簡化爲 $\frac{d^2z}{dx^2}+v^2z=0$ ，明顯地， $z=\cos vx$ 及 $z=\sin vx$ 是新方程的解，從疊合原理可得 $z=c_1\cos vx+c_2\sin vx$ 爲方程之通解；代入 $z = ye^{-ux}$ 於上式後，可得出原方程式的解爲 $z=(c_1\cos vx+c_2\sin vx)e^{ux}$ 。對能力較高的學生，教師可用值等式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 證明上述結果。 此部分對以後的學習很重要，所以教師應給予學生充份的練習，使其熟練地掌握求解此類方程的技巧。現實生活的應用可留至 2.7 節。
2.4 常係數非齊次方程 $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy = f(x)$ 的解 (a) 餘函數與特別積分	6	教師應清楚解釋以下之定理： 非齊次綫性微分方程的通解是約簡的齊次方程 (即置 $f(x)=0$) 的通解及該非齊次方程的特解之和。 教師應對學生強調，爲了避免混亂，一般稱約簡方程的通解爲「餘函數」面稱非齊次方程的特解爲「特別積分」，所以，對非齊次方程來說 通解 = 餘函數 + 特別積分 此定理之證明，可留給學生當作練習。

內容	時間分配	教學建議
(b) 待定係數法		學生只須用待定係數法求特別積分，而不須用逆算子法。 教師可利用下表幫助學生記憶多種特別積分 $y_p(x)$ 的試用形式。

函數 $f(x)$	$y_p(x)$ 的試用形式	
x^n	$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$	(0)
e^{px}	Ae^{px}	(p)
$c\cos px$ $c\sin px$ $c_1\cos px + c_2\sin px$	$A\cos px + B\sin px$	(ip)

但是教師應提醒學生若上表中括號內之數字是輔助方程的重數爲 k 的根 $(k = 1$ 或 $2)$，則 $y_p(x)$ 的試用形式應爲 x^k 倍相對的形式。下列的例子可清楚解釋上述重點。

例一

設 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos 2x$，則輔助方程之根爲 $\pm 3i$，故餘函數爲 $y_c = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x$。因爲 $2i$ 不是輔助方程的根，所以特別積分的試用式是 $y_p = A\cos 2x + B\sin 2x$。但是，對方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos 3x$，餘函數不變，但因 $3i$ 是輔助方程之根，故此特別積分的試用式應是 $y_p = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$。在上述兩種情況，學生應清楚知道他們必須將 $y_p(x)$ 代入方程方可得出 A 和 B 之值。

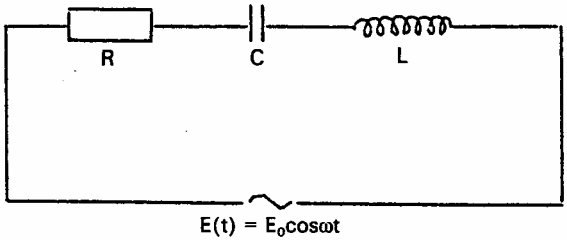
例二

設方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = x^2$，因 0 是輔助方程的其中一根 (另一根爲 -2)，故特別積分應試

內容	時間分配	教學建議
		$y_p = x(a + Bx + Cx^2)$，同樣地，可將 $y_p(x)$ 代入方程計算出 A，B 和 C 的值。 如果函數 $f(x)$ 是幾個不同類型的函數的綫性組合，則學生求此類方程的解時可能有困難，故此，教師應提供一些例子加以說明。 *例三* 設方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + e^{3x}$，輔助方程的根是 1 和 2。因 0 和 3 不是輔助方程的根，所以嘗試 $y_p = A_0 + A_1x + Be^{3x}$。教師應指出 $A_0 + A_1x$ 是相對 $4x$ 的特解，而 Be^{3x} 是相對 e^{3x} 的特解。但是，若方程是 $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x + e^x$，則因爲 1 (1 是 e^x 的指數 x 的係數) 是輔助方程的根，$y_p(x)$ 的試用形式應是 $$y_p = \underbrace{A_0 + A_1x}_{\text{相對 } 4x} + \underbrace{Bxe^x}_{\text{相對 } e^x}$$ 爲求保證學生能熟習解決現實生活難題的實際步驟，教師應給予學生充份的初值或邊界值問題。
2.5 將方程約簡爲常係數的二階微分方程	3	學生可將指定的公式代入微分方程並將之簡化。例如， 1. 代入 $x = e^z$ 可將方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ 簡化爲 $\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0$，但老師應提醒學生 $\frac{d^2y}{dz^2} \neq \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dz^2}$ 。

內容	時間分配	教學建議
		2. 代入 $y=\dfrac{z}{x^2}$ 可將方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x(x+2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2(x+1)^2y=e^{-x}$ 簡化爲 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+2\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+2z=e^{-x}$ 。 在此類例子中，教師應對學生強調下列公式： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right]$ $=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$
2.6 一階微分方程組	3	這裏只須考慮可利用消去法化爲二階綫性微分方程的簡單方程組；例如，方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-x=t$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y=t^2$ 可化簡爲 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+y=1+t^2$，而方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x-3y$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y-3x$ 則可化簡爲 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-8x=0$ 。
2.7 實際的應用	8	在現實生活中，有很多例子可運用二階微分方程去解決。教師應與學生討論如何去理解此類問題的解。下列是一些例子。 1. *商品的定價方針* 以下是某公司對其所生產的商品的定價方針。 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=-k\left(L(t)-L_0\right)$

內容	時間分配	教學建議
		$\frac{dL}{dt}=Q(t)-S(t)$ $S(t)=500-40P-10\frac{dP}{dt}$ $Q(t)=250-5P$ 其中 $P(t)$ = 商品價格 $S(t)$ = 預測銷量 $Q(t)$ = 生產水平 $L(t)$ = 存貨水平 L_0 = 最佳水平 k = 正常數 利用微分法，學生不難獲得 $\frac{d^2P}{dt^2}=-k\frac{dL}{dt}=-k\left(Q(t)-S(t)\right)$ $=-k(-250+35P+10\frac{dP}{dt})$ 或 $\frac{d^2P}{dt^2}+10k\frac{dP}{dt}+35kP=250k$ 2. *兩國人口增長問題* 設二國 A 和 B 的自然人口增長率爲每年 λ%，每年移民率也 A 國至 B 國的是 a%而 B 國至 A 國的則是 b%。若該二國之原本人口個數分別爲 N_1 及 N_2 則 t 年之後，該二國的人口個數 (分別以 $x(t)$ 及 $y(t)$ 表示) 可由 $\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda x}{100}-\frac{ax}{100}+\frac{by}{100}$ 及 $\frac{dy}{dt}=\frac{\lambda y}{100}-\frac{by}{100}+\frac{ax}{100}$ 求得。 (此組方程可簡化爲二階微分方程。) 3. *化學反應* 在一化學反應中，原有 2 kg 的物質 X 及 4 kg 的物質 Y。當時間位 t 時，有 x kg 的物質 X 及 y kg 的物質 Y 存在，其中變數 x 及 y 滿足方程 $\frac{dx}{dt}=-x^2y$，$\frac{dy}{dt}=-xy^2$。試求 $\frac{dy}{dx}$，答案以 x 及 y 表示，同時以 x 表示 y。 由此，求一以 x 及 t 組成的微分方程，同時以 t 表示 x。 4. *物質冷卻* 若一爲 y 度的物質存放於某房間 t 分鐘後，其關係滿足微分方程

內容	時間分配	教學建議
		$3\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}=0$。試用 $z=\frac{dy}{dt}$ 代入，或用其他方法，求 y，答案以 t 表示，已知當 $t = 0$，$y = 60$ 及當 $t = 6\ln 4$，$y = 35$。 試問何時物質的冷卻率會每分鐘低於一度，答案須準確至分鐘計算。那時，該物質的溫度爲何? 5. *電荷消耗* 一帶電荷 Q 庫侖的物質每秒鐘電荷的消耗率爲 kQ 庫侖，其中 k 爲常數。試寫出 Q 與 t 的微分方程，其中 t 代表該物質放電 t 秒後的時間。1 若起初的電荷爲 Q_0 庫侖，求該方程的解。若 $Q_0 = 0.001$ 及 $t = 10$，$Q = 0.0005$ 。當 $t = 20$，試求 Q 之值。 6. *電路* 若學生已學習電感及電容的概念，教師可引用有關電路的例子來增加他們的興趣。眾多有關方程中其中一則是 $L\frac{d^2\ell}{dt^2}+R\frac{d\ell}{dt}+\frac{1}{C}\ell=E_0\omega\cos\omega t$ 其中 R、C 及 L 串聯。 
	28	